06/12/2017.

Παράσταση Πολ. Παρεμβολής σε μορφή Νεύτωνα.

$P \in P_n$ πολ. παρεμβολής στα $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1})$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $a_i = \Delta^i(x_0, x_1, \dots, x_i)(f)$

Συμβολίζουμε το πολ. παρεμβολής στα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$ ως $P(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; x)$

$$P(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; x) = \Delta^0(x_0)(f) + \Delta^1(x_0, x_1)(f)(x-x_0) + \dots + \Delta^n(x_0, x_1, \dots, x_n)(f)(x-x_0) \cdot (x-x_1) \dots (x-x_{n-1})$$

Για $n=0$:

$P(x_0, x) = \Delta^0(x_0) f = f(x_0)$, ισχύει

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n-1$.

δηλαδή $P(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; x) =$

$$= \Delta^0(x_0) f + \Delta^{(1)}(x_0, x_1) f(x-x_0) + \dots + \Delta^{n-1}(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot f \cdot \prod_{i=0}^{n-2}(x-x_i)$$

$$P(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; x) = \Delta^{n-1}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot x^{n-1} + r(x), \quad r \in P_{n-2}$$

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n; x) = \Delta^{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot x^{n-1} + f(x), \quad f \in P_{n-2}$$

Παρατηρούμε ότι το πολ. παρεμβολής

$$P(x_0, x_1, \dots, x_n; x) = P(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; x) + a_n(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1})$$

Διότι το πολ $P(x_0, x_1, \dots, x_n; x) - P(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; x)$ έχει ρίζες τα $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$

Αποδεικνύουμε ότι $P(x_0, x_1, \dots, x_n; x) =$

$$= \frac{(x-x_0)P(x_1, x_2, \dots, x_n; x) - (x-x_n)P(x_0, \dots, x_{n-1}; x)}{x_n - x_0}.$$

Πραγματικά: είναι πολ. το πολύ n βαθμού. για $x = x_0$

$P(x_0, x_1, \dots, x_n; x_0) = P(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; x_0) = f(x_0)$

για $x = x_j$, $j = 1, \dots, n-1$.

$$P(x_0, x_1, \dots, x_n; x_j) = \frac{(x_j - x_0)f(x_j) - (x_j - x_n)f(x_j)}{(x_n - x_0)}.$$

$$= f(x_j)$$

$P(x_0, x_1, \dots, x_n; x_n) = P(x_1, x_2, \dots x_n; x_n) = f(x_n).$

Ο συντελεστής μεγ. όρου του $P(x_0, x_1, \dots, x_n, x)$ είναι ο από τη $\dfrac{\Delta^{n-1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)(f) - \Delta^{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1})(f)}{x_n - x_0}$

$$= \Delta^n(x_0, x_1, \dots, x_n)(f)$$

Πίνακας Διηρημένων Διαφορών

x_i	$\Delta^0(x_i)f$	Δ	Δ^2	Δ^3
x_0	$\Delta^0(x_0)(f)$			
		$\Delta^1(x_0, x_1)(f)$		
x_1	$\Delta^0(x_1)(f)$			
		$\Delta^1(x_1, x_2)(f)$	$\Delta^2(x_0, x_1, x_2)(f)$	
	$\Delta^0(x_2)(f)$			
		$\Delta^1(x_2, x_3)(f)$	$\Delta^2(x_1, x_2, x_3)(f)$	$\Delta^3(x_0, x_1, x_2, x_3)$
	$\Delta^0(x_3)(f)$			

x_i	-1	0	1	2
f_i	-2	0	0	8

x_i	Δ^0	Δ^1	Δ^2	Δ^3
-1	2			
0	0	-2		
1	0	0	1	
2	8	8	4	1

$$P(x) = \Delta^0(x_0)(f) + \Delta^1(x_0,x_1)(f)(x-x_0) + \Delta^2(x_0,x_1,x_2)(f)\cdot(x-x_0)(x-x_1) +$$
$$+ \Delta^3(x_0,x_1,x_2,x_3)(f)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) =$$
$$= 2 - 2(x+1) + 1(x+1)x + 1(x+1)x(x-1)$$
$$= x^3 + x^2 - 2x.$$

~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o

<u>Άσκηση</u>: Ναι : $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = \sum \dfrac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n}(x-x_j)}{\prod_{j=1, j\neq i}(x_i-x_j)} = 1.$

<u>Λύση</u>

$P(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} 1\, L_i(x)$, από τη μορφή Lagrange.

αυτό είναι το πολ. παρεμβολής της $f(x)=1$. Αλλά $f \in P_n$. Λόγω μοναδικότητας του πολ. παρεμβολής η $f(x)=1$ είναι και το παρεμβολής.

Άσκηση Να αποδειχθεί η σχέση

$$\Delta^n(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)(f) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}} (x_i - x_j)}$$

Λύση

Από τον τύπο του Newton: $\Delta^n(x_0, x_1, \dots x_n)(f)$ είναι ο συντ. μεγ. όρου του πολ. παρεμβολής.

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}$$, ο σ.μ.ο. του τύπου

Lagrange είναι $\sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}} (x_i - x_j)}$ (λόγω μοναδ. του πολ. παρ.)

~o~o ~o~o ~o~o

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i(x) = x^k \quad , k \leq n.$$

~o~o~o~o~o~o

Άσκηση

Να βρεθεί η συν f, αν είναι γνωστό ότι είναι πολ/μο $3^{ου}$ βαθμού με συντ. μεγ. όρου 1 και δίνεται από τον πίνακα τιμών

x_i	0	1	2
f_i	1	-1	3

Λύση

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)} \prod (x - x_i)$$

x_i	Δ^0	Δ^1	Δ^2
0	1		
1	-1	-2	
2	3	4	3

$P(x) = 1 + 2x + 3x(x-1) = 3x^2 - x + 1.$

$$f^{(3)}(\xi) = \left(\xi^3 + r_2(\xi)\right)^{(3)} = 3!$$

$$\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\, x(x-1)(x-2) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

Επομένως $f(x) = 3x^2 - 5x + 1 + x^3 - 3x^2 + 2x \Rightarrow$

$$f(x) = x^3 - 3x + 1.$$